С обзиром да решеткасти носачи примају само N силе а да у њима T силе и M не постоје, ј-на (6) гласи:

$$\delta = \int_S \bar{N}\varepsilon ds - \Sigma \bar{C}_i c_i$$, која може да се напише и:

$$\delta = \sum_S \int_1^k \bar{N}\varepsilon ds - \Sigma \bar{C}_i c_i$$, ту уочавамо да је у њој подинтегрална ф-ја $\bar{N}\cdot\varepsilon$ константна дуж појединих штапова,

$$\Rightarrow \int_1^k \bar{N}\varepsilon ds = \bar{N}\cdot\varepsilon\int_1^k ds = \bar{N}\cdot\varepsilon\cdot l = \bar{S}\Delta l$$

$\bar{S}$ - аксијална сила у посматраном носачу од вирт. оптерећења носача, за померања решеткастих носача добијамо:

$$\delta = \sum_S \bar{S}\Delta l - \Sigma \bar{C}_i c_i \quad (11)$$

Кад у (11) унесемо: $\Delta l = \frac{Sl}{EF} + \alpha_t \cdot t^\circ l$ $\Rightarrow$

$$\delta = \sum_S \frac{S\bar{S}}{EF}\cdot l + \sum_S \bar{S}\alpha_t\cdot t^\circ l - \Sigma \bar{C}_i \cdot c_i \quad (12)$$

За СОН решеткаст носач први члан на десној страни (12) представља утицај оптерећења, други утицај темп. промена а трећи утицај померања ослонаца и уклештења:

$$\delta_0 = \sum_S \frac{S\bar{S}}{EF}\cdot l \qquad \delta_t = \sum_S \bar{S}\alpha_t\cdot t^\circ l \qquad \delta_c = -\Sigma \bar{C}_i \cdot c_i \quad (13)$$

Да бисмо избегли да рачунамо са малим величинама, померања решеткастих носача обично множимо са EF_c $\Rightarrow$

$$EF_c\,\delta = \sum_S \bar{S}\,EF_c\,\Delta l - EF_c\Sigma \bar{C}_i c_i \quad (14)$$

тј.

$$\left.\begin{aligned} EF_c\,\delta_0 &= \sum_S S\bar{S}\frac{F_c}{F}l \\ EF_c\cdot\delta_t &= EF_c\sum_S \bar{S}\alpha_t\cdot t^\circ l \\ EF_c\cdot\delta_c &= -EF_c\Sigma \bar{C}_i c_i \end{aligned}\right\} (15)$$

(50) Нумерички поступци за прорачун померања
(51) („Множење дијаграма", нумеричка интеграција)

Када су за један носач срачунати статички утицаји од задатог и виртуалног оптерећења, прорачун померања:

Код пуних носача: [своди се на квадратуру интеграла ⇒]

$$\int_s M\bar{M}\frac{I_c}{I}ds,\quad \int_s N\bar{N}\frac{F_c}{F}ds,\quad \int_s kT\cdot\bar{T}\cdot\frac{F_c}{F}ds,\quad \int_s \bar{M}\cdot\alpha_t\cdot\frac{\Delta t^o}{h}ds \quad \int_s \bar{N}\alpha_t\cdot t^o ds \qquad (1)$$

Код решеткастих носача: [формирање збирова ⇒]

$$\sum_s S\bar{S}\frac{F_c}{F}l \quad \text{и} \quad \sum_s \bar{S}\alpha_t\cdot t^o l \qquad (2)$$

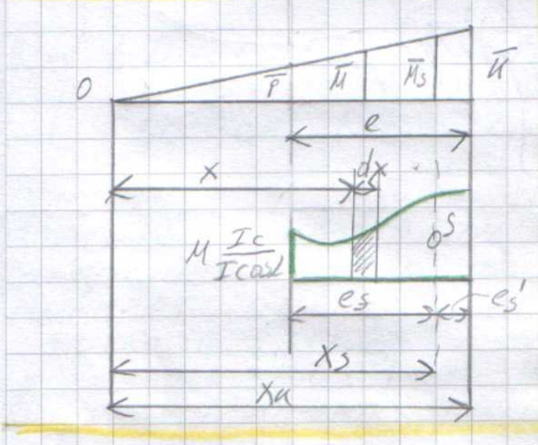
* При прорачуну померања користимо методе којима вредности интеграла у изразима за померања могу да се одреде непосредно на основу дијаграма ф-ја у тим интегралима.

Посматрајмо следећи интеграл:

$$\int_s M\bar{M}\frac{I_c}{I}ds = \sum_s\int_i^k M\bar{M}\frac{I_c}{I}ds = \sum_s\int_i^k M\bar{M}\frac{I_c}{I\cos\alpha}dx \qquad (3)$$

Овом ј-ном прорачун интеграла ф-је $M\bar{M}\frac{I_c}{I}$ своди се на прорачун интеграла те ф-је дуж осе појединих штапова носача, односно дуж пројекција осе појединих штапова на одређене правце.

-Често је бар једна од ф-ја M или $\bar{M}$ линеарна ф-ја координате x на оси дуж које интегралимо.
Нека то буде $\bar{M}$, и нека је дијаграм те ф-је права линија на слици.



Ако вредност ф-је $\bar{M}$ на крајевима штапа означимо са $\bar{i}$ и $\bar{k}$, а за тачку O од које меримо одстојање x изаберемо тачку у којој је ф-ја $\bar{M}=0$. ⇒

$$\bar{M}=\bar{k}\frac{x}{x_k}$$

Када ову вр унесемо у (3)

$$\Rightarrow \int_i^k M\bar{M}\frac{I_c}{I}ds = \frac{\bar{k}}{x_k}\int_i^k x\left(M\frac{I_c}{I\cos\alpha}\right)dx$$

Где је: $M\frac{I_c}{I\cos\alpha}$ → ордината дијаграма редукованих мом. M (на слици)

$\frac{MI_c}{I\cos\alpha}dx$ → елеменат површине тог дијаграма,

$x\left(\frac{MI_c}{I\cos\alpha}\right)dx$ → статички момент тог елемента у односу на тачку O.

Интеграл ових елементарних момената је укупни момент површине дијаграма редукованих момената који је једнак производу из величине те површине F_r и отстојања њеног тежишта x_s у односу на тачку 0, ⇒

$$\int_1^k M\bar M \frac{I_c}{I}\, ds = \frac{\bar k}{x_k}\int_1^k x\left(M\frac{I_c}{I\cos\alpha}\right)dx = \bar k\,\frac{x_s}{x_k}\,F_R = \bar M_s F_r \qquad /5/$$

Из /5/ следи да је $\boxed{\int_1^k M\bar M \frac{I_c}{I}\, ds} \rightarrow (6)$ вредност интеграла када је ф-ја $\bar M$ линеарна ф-ја једнака производу величине површине дијаграма редукованих момената M и ординате дij. момената $\bar M$ у тежишту површине $\frac{M I_c}{I\cos\alpha}$.

Овим ставом одређивање (6) сведено је на одређивање величине једне површине која је ограничена дијаграмом који је нешто једноставнији од дијаграма подинтегралне ф-је интеграла (6), и на одређивање тежишта те површине.

-Вредности интеграла на овај начин одређено САМО дуж штапова са правом осом и константним моментом инерције за који /5/ може овако да се напише:

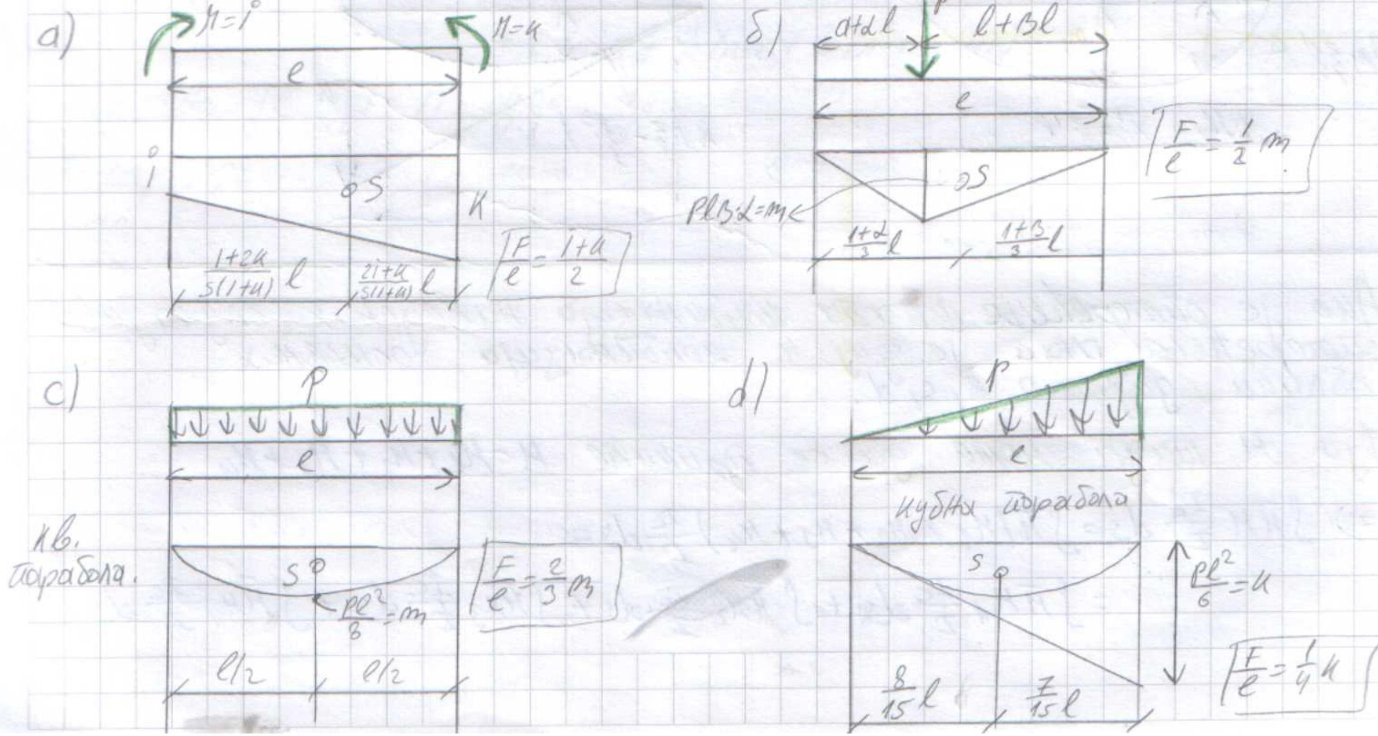
$$\int_1^k M\bar M \frac{I_c}{I}\, ds = \bar M_s F_r = \frac{I_c}{I}\bar M_s F_r = \frac{I_c}{I}\, l\, \bar M_s \frac{F}{l} = l'\, \bar M_s \frac{F}{l} \qquad /7/$$

$$l' = l\,\frac{I_c}{I}$$

где су: F - величина површине дij. M
l' - РЕДУКОВАНА ДУЖИНА ШТАПА.

-Облик моментне површине зависи од оптерећења штапа.

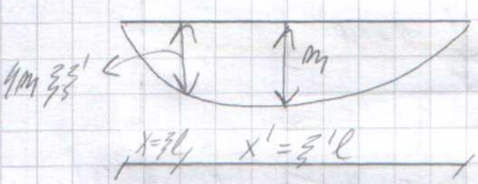
Основне врсте оптерећења, одговарајући моменти на слици:

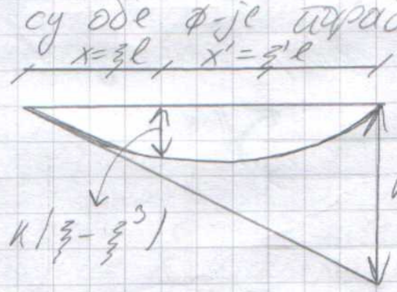


На основу података са слике из j-не (7) срачунате вредности интеграла дати су у таблицу.

$\frac{1}{l'}\frac{I_c}{I}\int M\bar{M}ds$	$\bar{i}$	$\bar{k}$	$\bar{i}$ $\bar{k}$	$\bar{m}$ αl βl	$\bar{m}$	$\bar{k}$
i	$i\bar{i}$	$\frac{1}{2}i\bar{k}$	$\frac{1}{2}i(\bar{i}+\bar{k})$	$\frac{1}{2}i\bar{m}$	$\frac{2}{3}i\bar{m}$	$\frac{1}{4}i\bar{k}$
k	$\frac{1}{2}k\bar{i}$	$\frac{1}{3}k\bar{k}$	$\frac{1}{6}i(2\bar{i}+\bar{k})$	$\frac{1}{6}k\bar{m}(1+\alpha)$	$\frac{1}{3}k\cdot\bar{m}$	$\frac{2}{15}k\bar{k}$
i	$\frac{1}{2}i\bar{i}$	$\frac{1}{6}i\bar{k}$	$\frac{1}{6}i(2\bar{i}+\bar{k})$	$\frac{1}{6}i\bar{m}(1+\beta)$	$\frac{1}{3}i\bar{m}$	$\frac{7}{60}i\bar{k}$
i k	$\frac{1}{2}(i+k)\bar{i}$	$\frac{1}{6}(i+2k)\bar{k}$	$\frac{1}{6}[i(2\bar{i}+\bar{k})+k(\bar{i}+2\bar{k})]$	$\frac{1}{6}[i(1+\beta)+k(1+\alpha)]\bar{m}$	$\frac{1}{3}(i+k)\bar{m}$	$\frac{1}{60}[7i+8k]\bar{k}$
m αl βl	$\frac{1}{2}m\bar{i}$	$\frac{1}{6}m\bar{k}(1+\alpha)$	$\frac{1}{6}m[\bar{i}(1+\alpha)+\bar{k}(1+\beta)]$	$\frac{1}{3}m\bar{m}$	$\frac{1}{3}m\bar{m}(1+\alpha\beta)$	$\frac{1}{20}m\bar{k}(1+\alpha)*(\frac{7}{3}-\alpha^2)$
m	$\frac{2}{3}m\bar{i}$	$\frac{1}{3}m\bar{k}$	$\frac{1}{3}m(\bar{i}+\bar{k})$	$\frac{1}{3}m\bar{m}(1+\alpha\beta)$	$\frac{8}{15}m\bar{m}$	$\frac{1}{5}m\bar{k}$
k	$\frac{1}{4}k\bar{i}$	$\frac{2}{15}k\bar{k}$	$\frac{1}{60}k(7\bar{i}+8\bar{k})$	$\frac{1}{20}k\bar{m}(1+\alpha)*(\frac{7}{3}-\alpha^2)$	$\frac{1}{5}k\bar{m}$	$\frac{8}{105}k\bar{k}$
i	$\frac{1}{4}i\bar{i}$	$\frac{7}{60}i\bar{k}$	$\frac{1}{60}i(8\bar{i}+7\bar{k})$	$\frac{1}{20}i\bar{m}(1+\alpha)*(\frac{7}{3}-\beta^2)$	$\frac{1}{5}i\bar{m}$	$\frac{31}{420}i\bar{k}$

Изузетак су вредности када су обе ф-је параболичне.





Ако је оптерећење штапа комбинација наведених случајева оптерећења, онда је диј. М комбинација основних облика диј. a, b, c, d.

Ф-ја М тада може да се прикаже $M=M_1+M_2+M_3+M_4$

$$\Rightarrow \int \bar{M}M\frac{I_c}{I}ds=\int\bar{M}(M_1+M_2+M_3+M_4)\frac{I_c}{I}ds=$$

$$=\int\bar{M}M_1\frac{I_c}{I}ds+\int\bar{M}M_2\frac{I_c}{I}ds+\int\bar{M}M_3\frac{I_c}{I}ds+\int\bar{M}M_4\frac{I_c}{I}ds \quad (8)$$

када је и $M = M_1 + M_2$
$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ $\Rightarrow$

$$\int \bar{M} M \frac{I_c}{I} ds = \int (\bar{M}_1 + \bar{M}_2)(M_1 + M_2) \frac{I_c}{I} ds = \int \bar{M}_1 M_1 \frac{I_c}{I} ds + \int \bar{M}_1 M_2 \frac{I_c}{I} ds + \int \bar{M}_2 M_1 \frac{I_c}{I} ds + \int \bar{M}_2 M_2 \frac{I_c}{I} ds \quad (9)$$

Нумеричка интеграција

- Користимо је када имамо штап са променљивим мом. ин., тј. за штап чије се оптер. не мења линеарно.
- Интервал у коме тражимо вредност интеграла уздуж дужине l, од тачке $i=0$ до $i=n$, са $(n-1)$-ом међутачком делимо на n једнаких делова дужине $\lambda = l/n$.

Вредности подинтегралне ф-је: $Y = M\bar{M} \frac{I_c}{I \cos\alpha}$ у уоченом низу тачака бележимо са $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Y_n$.

По трапезном правилу:

$$\int_i^k \bar{M} M \frac{I_c}{I} ds = \lambda \left(\frac{Y_0}{2} + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n-1} + \frac{Y_n}{2} \right) \quad (10)$$

ТРАПЕЗНО

да бисмо примениле Симпсоново правило:

СИМПСОНОВО

$$\int_i^k \bar{M} M \frac{I_c}{I} ds = \frac{\lambda}{3} \left(Y_0 + 4Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 + \dots + 2Y_{n-2} + 4Y_{n-1} + Y_n \right) \quad (11)$$

потребно је да n буде паран број, а да бисмо применили тросминско правило:

$$\int_i^k M\bar{M} \frac{I_c}{I} ds = \frac{3}{8} \lambda \left(Y_0 + 3Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 + 3Y_4 + 3Y_5 + 2Y_6 + \dots + 2Y_{n-3} + 3Y_{n-2} + 3Y_{n-1} + Y_n \right) \quad (12)$$

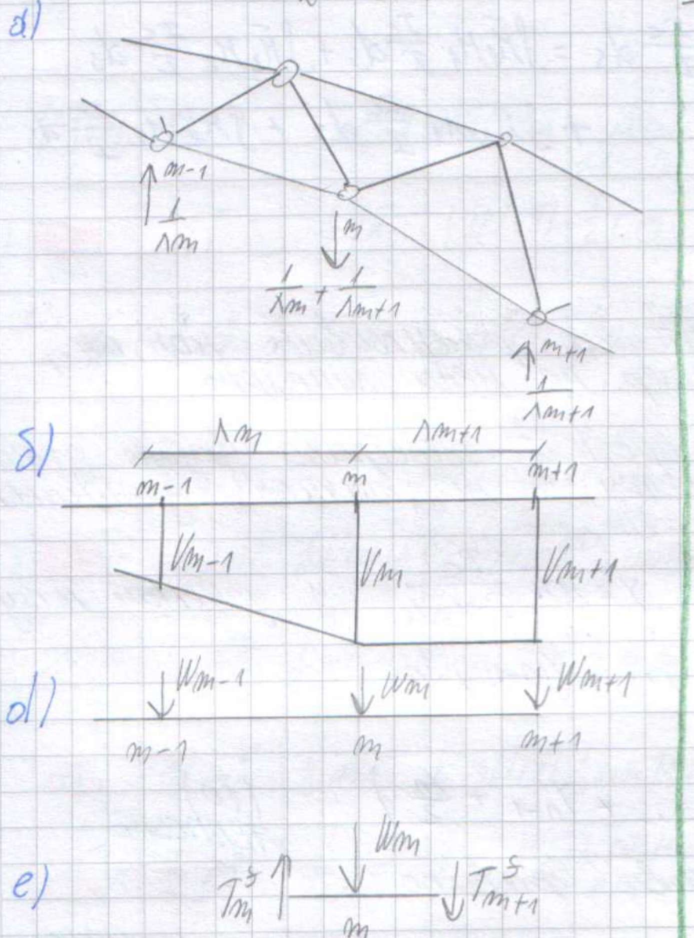
ТРОСМИНСКО

потребно је да n буде дељиво са 3.

[стр. 264-268 (-270)]

(21) (52) ОДРЕЂИВАЊЕ ДИЈАГРАМА ПОМЕРАЊА РЕШЕТКАСТИХ НОСАЧА ПРИМЕНОМ ЕЛАСТИЧНИХ ТЕЖИНА.

[w – еластична тежина]



Желимо да одредимо померања чворова ... $m-1, m, m+1$ ... решеткастог носача а.)

На слици б) приказан је полигон са теменима у уоченом низу тачака чије су ординате једнаке померањима тих тачака v_{m-1}, v_m, v_{m+1}.

Ако овај полигон схватимо као дијаграм момената M^s једног правог фиктивног штапа у правцу x-осе који је оптерећен фиктивним концентрисаним силама w_{m-1}, w_m, w_{m+1} (d), тангенси углова нагиба страна тог полигона једнаки су T силама T^s фиктивног штапа.

Ако трансверзалну силу фиктивног штапа на делу $(m-1)-m$ обележимо са T^s_m, а на делу $(m)-(m+1)$ са T^s_{m+1}, тада:

$$T^s_m = \frac{v_m - v_{m-1}}{\lambda_m} \qquad T^s_{m+1} = \frac{v_{m+1} - v_m}{\lambda_{m+1}}$$

Из услова равнотеже елемената који је исечен из фиктивног штапа пресецима лево и десно од чвора m (e) и израза за силе T^s_m и T^s_{m+1} ⇒

$$W_m = T^s_m - T^s_{m+1} = \frac{v_m - v_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{v_{m+1} - v_m}{\lambda_{m+1}}$$

тј.

$$W_m = -\frac{1}{\lambda_m} v_{m-1} + \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}\right) v_m - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \cdot v_{m+1} \qquad (1)$$

Ј-на (1) је w-тежина у чвору m приказана као збир три члана од којих је сваки производ 2 чиниоца.

Један од тих чиниоца су тражена померања штапа v_{m-1}, v_m, v_{m+1} а други $\left[\frac{1}{\lambda_m}, \frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}, \frac{1}{\lambda_{m+1}}\right]$

Када величине $\frac{1}{\lambda_m}, \frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}, \frac{1}{\lambda_{m+1}}$ схватимо као фиктивне силе у чворовима $m-1, m, m+1$ датог штапа, десна страна ј-не (1) представља рад тих сила при стварним померањима штапа.

→

На основу принципа виртуалних сила овај рад, тј. w-тежина у чвору m може за пуне носаче да се прикаже

$$W_m = \int_0^l (\bar M \kappa + \bar N \varepsilon + \bar T \varphi_T) ds \qquad (2)$$

а за решеткасте носаче:

$$W_m = \sum_i \bar S_i \Delta l_i = \sum \frac{\bar S_i S_i l_i}{EF_i} + \sum \bar S_i \alpha_t \cdot t^\circ l_i \qquad (3)$$

где су:

$\bar M, \bar N, \bar T$ тј. $\bar S_i$ – силе у пресецима једног могућег равнотежног стања носача оптерећеног фиктивним силама $\frac{1}{\lambda_m}, \frac{1}{\lambda_m}+\frac{1}{\lambda_{m+1}}, \frac{1}{\lambda_{m+1}}$

$\kappa, \varepsilon, \varphi_T$ тј. Δl – стварне деформацијске величине штапа.

(3) → еластичне тежине којима треба оптеретити фиктивни носач да би добили диј. w.

ТЕОРЕМЕ УЗАЈАМНОСТИ.

I ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РАДОВА [BETTI-јева]

Посматраћемо 2 стања у једном произвољном сложеном СНН. Једно стање које у њему изазива оптерећење силама P_m, $m=1 \dots k$, и померања ослонаца и уклештења c_i и друго стање које у њему изазива оптерећење силама $\bar{P}_n$, $n=1 \dots l$, и померања ослонаца и уклештења $\bar{c}_i$. Првом стању одговарају реакције ослонаца и уклештења C_i, силе у пресецима N, T, M, деформације:

$$\varkappa = \frac{M}{EI}, \quad \varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad \varphi_T = k\frac{T}{GF} \quad \text{и померања тачака } \delta.$$

Другом стању одговарају реакције $\bar{C}_i$, силе у пресецима $\bar{N}, \bar{T}, \bar{M}$, деформације

$$\bar{\varkappa} = \frac{\bar{M}}{EI}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{N}}{EF}, \quad \bar{\varphi}_T = k\frac{\bar{T}}{GF}, \quad \text{и померања тачака } \bar{\delta}.$$

Силе P_m, $m=1 \dots k$, са реакцијама C_i и унутрашњим силама N, T, M, представљају једно могуће равнотежно стање носача, док деформације $\bar{\varkappa}, \bar{\varepsilon}, \bar{\varphi}_T$ са померањима $\bar{\delta}$ и $\bar{c}_i$ представљају једно могуће стање деформације носача.

Из принципа виртуалних сила или из принципа виртуалних померања [зависи од тога које ћемо од ова два стања сматрати за стварно стање а које за виртуално], $\Rightarrow$

$$\sum P_m \bar{\delta}_m + \sum C_i \bar{c}_i = \int_S \left(\frac{M\bar{M}}{EI} + \frac{N\bar{N}}{EF} + k\frac{T\bar{T}}{GF} \right) ds \qquad (1)$$

Кад једн.(1) напишемо за оно равнотежно стање које се састоји од спољашњих сила $\bar{P}_n$, $\bar{C}_i$ и унутрашњих сила $\bar{N}, \bar{T}, \bar{M}$, а за стање деформације које се састоји од деформација $\varkappa, \varepsilon, \varphi_T$ и померања δ и c_i, добијамо

$$\sum \bar{P}_n \delta_n + \sum \bar{C}_i c_i = \int_S \left(\frac{M\bar{M}}{EI} + \frac{N\bar{N}}{EF} + k\frac{T\bar{T}}{GF} \right) ds \qquad (2)$$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$

$$\boxed{\sum P_m \bar{\delta}_m + \sum C_i \bar{c}_i = \sum \bar{P}_n \delta_n + \sum \bar{C}_i c_i} \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РАДОВА

Ако на носач делују два система спољашњих утицаја: силе P_m са померањима ослонаца и уклештења c_i и силе $\bar{P}_n$ са померањима $\bar{c}_i$, рад спољашњих сила P_m и C_i првог система утицаја при померањима које изазива други систем утицаја једнак је раду спољашњих сила $\bar{P}_n$ и $\bar{C}_i$ другог система утицаја при померањима која изазива први систем утицаја.

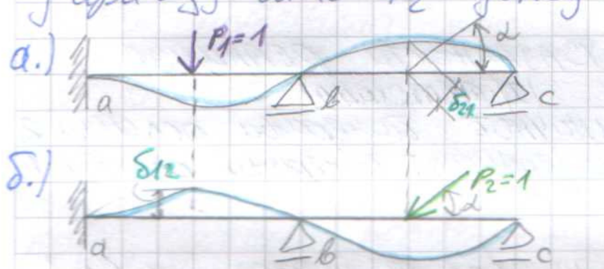
II ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ ПОМЕРАЊА

Да бисмо из теореме I извели II претпоставићемо да се ослонци датог носача не померају, уклештења не обрћу а да се системи сила P_m и $\overline{P_n}$ састоје само од по једне јединичне силе.
Јединичну силу P_m обележимо са P_1 а $\overline{P_n}$ са P_2.
Ако померање нападне тачке силе P_1 у правцу силе P_1 услед силе P_2 обележимо са δ_{12}, а померање нападне тачке силе P_2 у правцу силе P_2 услед силе P_1 обележимо δ_{21},
На основу I $\Rightarrow$

$$1\cdot\delta_{12} = 1\cdot\delta_{21} \qquad \boxed{\delta_{12}=\delta_{21}} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РАДОВА

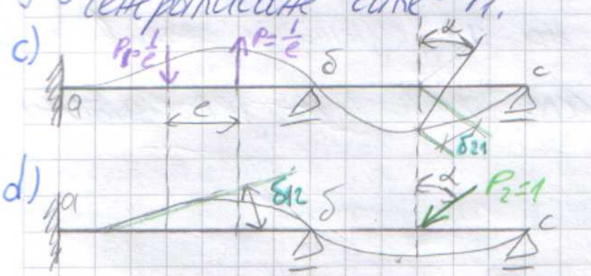
Ако на носач чији се ослонци не померају делују две јединичне силе P_1 и P_2, померања нападне тачке силе P_1 у правцу силе P_1 услед силе P_2 једнако је померању нападне тачке силе P_2 у правцу силе P_2 услед силе P_1.



Сагласно теореми II вертикална компонента померања нападне тачке силе P_1 носача на слици б.) једнака је компоненти померања нападне тачке P_2, у правцу те силе, носача на слици а.)

Ако уместо јединичних сила за P_1 и P_2 усвојимо јединичне генералисане силе, тада у јн. (1) величине δ_{12} и δ_{21} представљају одговарајућа генералисана померања.
Теорема II тада гласи:

Померање генералисане силе P_1 услед јединичне генералисане силе P_2 једнако је померању генералисане силе P_2 услед јединичне генералисане силе P_1.



Ако за јединичну силу P_1 усвојимо пар сила P на одстојању e приказан на c.), чији је момент $M=P\cdot e=1$, а за силу P_2 усвојимо јединичну концентрисану силу d.), из генералисане Максвелове теореме следи да је померање нападне тачке силе P_2 у правцу те силе услед јединичног спрега сила M, једнако померању које одговара спрегу M као генералисаној сили, тј. једнако углу обртања праве која спаја нападне тачке сила P, услед P_2.

Димензија!! δ_{12} и δ_{21} $\rightarrow$ генералисана померања по јединици ген. силе.

$$[\delta_{12}]=[\delta_{21}]=\left[\frac{\text{ДИМЕНЗИЈА ПОСМАТРАНОГ ГЕН. ПОМ.}}{\text{ДИМЕНЗИЈА ПАРАМЕТРА ГЕН СИЛЕ КОЈА ИЗАЗИВА ПОМ.}}\right]=(\text{на слици})\Rightarrow\left[\frac{m}{kNm}\right]=[kN^{-1}]$$

III ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РЕАКЦИЈА [REYLEIGH-ова] (I)

Да би из теореме I извели III полазимо од 2 равнотежна стања НЕОПТЕРЕЋЕНОГ НОСАЧА:

- једног, које изазива јединично померање ослонаца 1 → $\boxed{c_1=1}$
- и другог, које изазива јединично померање ослонаца 2 → $\boxed{c_2=1}$

У СОН ова померања не изазивају ни реакције ослонаца ни моменте уклештења, па ни при једном од ова два стања на носач не делују никакве спољашње силе. Теорема III своди се тада на $0=0$.

У СНН ова померања изазивају реакције ослонаца и моменте уклештења, које ћемо за стање померања $\boxed{c_1=1}$ обележити са c_{i1}, $i=1,2,\dots,(z_0+z_4)$ а за стање померања $\boxed{c_2=1}$ са c_{i2}, $i=1,2,\dots,(z_0+z_4)$.

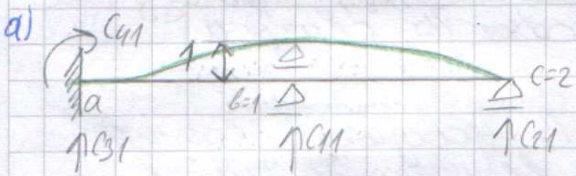
Из I ⇒ $1\cdot c_{12}=1\cdot c_{21}$

$$\boxed{c_{12}=c_{21}} \quad (1)$$

→ ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РЕАКЦИЈА (I РЕЛИЈЕВА)

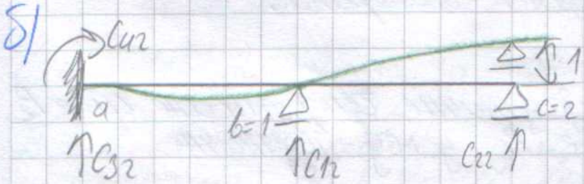
Реакција ослонца 1 услед јединичног померања ослонца 2 једнака је реакцији ослонца 2 услед јединичног померања ослонца 1.

a)



⇒ ослонац b=1 се помера за $c_1=1$

б)



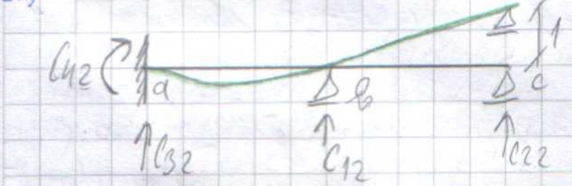
⇒ ослонац c=2 се помера за $c_2=1$

Из теореме III ⇒ реакција ослонца c на а.) једнака је реак. в. на б.)

Теорема III не односи се само на реак. осл. већ и на уклештења.

c.)

d)



Када теорему III применимо на систем реакција које изазива јединична ротација укљештења на слици с.) и на систем реакција, које изазива јединично померање ослонца 2 на слици d.) добијамо да је $C_{21} = C_{12}$, тј. добијамо да је реакција ослонца с услед јединичне ротације укљештења а једнака реакцији укљештења а услед јединичног померања ослонца с.

У овој једнакости, слично као и у једнакости ген. пом, величину C_{21} и C_{12} треба схватити као генералисану реакцију при јединици ген. пом., тј. као величину чија је димензија једнака $= \left[\dfrac{\text{Дим. ген. реакције}}{\text{Дим. ген. пом. који изазива ту реакцију}} \right]$

-Унутрашње силе у носачу могу да се схвате и као реак. одређених унутрашњих веза носача.

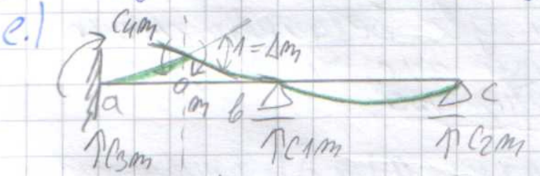
-Ако круту везу у неком пресеку носача заменимо зглавкастом везом уклонили смо унутрашњу везу носача која спречава релативно обртање делова лево и десно од тог пресека. Утицај уклоњене везе замењујемо паром момената који су једнаки моменту савијања у том пресеку а који може да се схвати и као реакција уклоњене везе.

-Ако круту везу у неком пресеку носача заменимо подужним или попречним зглобом уклонили смо унутрашњу везу носача која спречава релативно транслаторно померање делова лево и десно од тог пресека у правцу осе штапа односно управно на тај правац. Утицај тих веза замењујемо њиховим реакцијама - нормалном односно трансверзалном силом у посматраном пресеку.

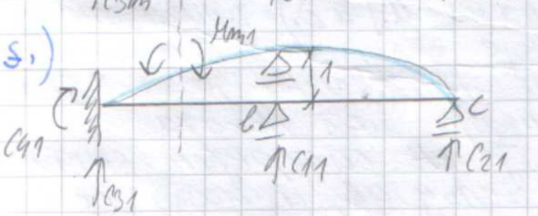
Тада теорема III може да се напише:

Реакција везе 1 услед јединичног померања везе 2 једнака је реакцији везе 2 услед јединичног померања везе 1.

e.)



ђ.)



Ако за реакцију везе 1 континуалног носача abc. изаберемо реак. осл. b=1 а за реак. везе 2 мом. сав. у пресеку m, тада је пом. везе 1 померање ослонца b а пом. везе 2 је промена угла између пресека лево и десно од зглоба m.

[Слика]

На основу III теореме, реакција осл. b услед промене угла између пресека у зглобу m величине 1, тј. реакција C_{1m} једнака је мом. сав. у пресеку m, тј. мом. M_{m1} услед јединичног померања ослонца b.

IV ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РЕАКЦИЈА И ПОМЕРАЊА

Да бисмо из I извели IV полазимо од равнотежног стања носача чији се ослонци не померају а који је оптерећен једном јединичном силом P и од равнотежног стања носача које изазива јединично померање ослонца 1. Сила P=1 изазива реакције ослонаца C_{iP}, а јединично померање ослонца 1 изазива реак. осл. C_{i1}.
У првом стању померања свих осл. су =0, а у другом стању једине спољашње силе су реакције C_{i1}, ⇒ рад спољ. сила другог система утицаја при померањима које изазива први систем утицаја је једнак нули.
По теореми I је тада и рад спољ. сила првог система утицаја при померањима које изазива други систем утицаја једнак нули.

- Од спољашњих сила у првом систему поред силе P рад врши и реак. C_{1P}.

- Ако са δ_{P1} обележимо померање нападне тачке силе P у правцу те силе услед јединичног померања ослонца 1 услов да је рад спољашњих сила првог система утицаја при померањима која изазива други систем утицаја једнак нули гласи:

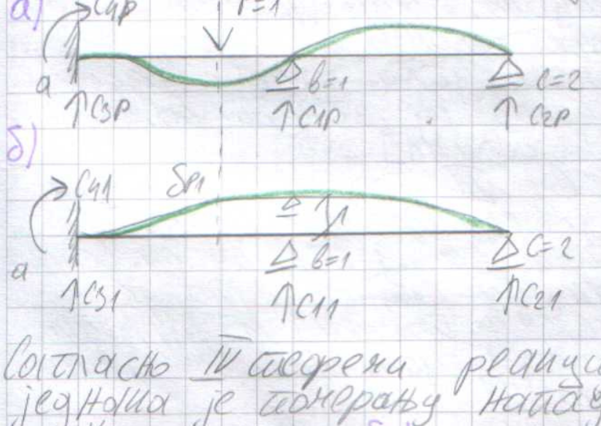
$$1\cdot\delta_{P1} + C_{1P}\cdot 1 = 0$$

$$\boxed{C_{1P} = -\delta_{P1}} \qquad (1)$$

ТЕОРЕМА О УЗАЈАМНОСТИ РЕАКЦИЈА И ПОМЕРАЊА.
(II RELIYEVA)

Реакција ослонца 1 услед јединичне силе P једнака је негативној вредности померања нападне тачке силе P у правцу те силе услед јединичног пом. ослонца 1.

У овој теореми реч је о једнакости две бездимензионалне величине: реакције, тј. силе по јединици силе и померања по јединици померања.



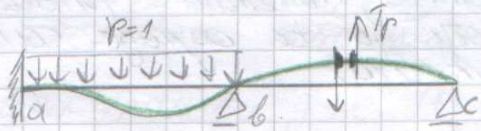
На сликама а.) и б.) приказане су силе које делују на континуалан носач и приказана је деформација тог носача када је он оптерећен силом P=1 у пољу ав, и када се ослонац в=1 тог носача помера за $c_1 = 1$.

Сагласно IV теореми реакција осл. в носача на слици а.) једнака је померању нападне тачке силе P у правцу те силе на слици б.!

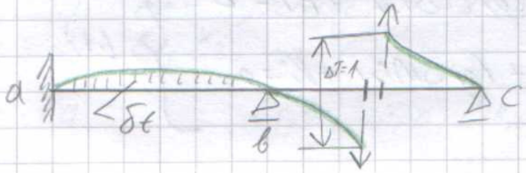
Са генералисаним појмовима силе, померања, везе и реакција везе може да се генералише и II теорема и искаже у сл. облику:

Реакција везе 1 услед јединичне генералисане силе P једнака је негативној вредности генералисаног померања силе P услед јединичног померања везе 1.

c.)



d.)



На слици c.) континуалан носач abc оптерећен је једнако подељеним оптерећењем p. Рад елементарне силе p dx која се преноси преко елемента дужине dx при померању δ(x) на месту x је pδ(x)dx, а рад целокупног оптерећења је:

$$\int_a^b p\delta(x)dx = p\cdot\int_a^b \delta(x)dx = p\cdot F$$

F - површина дијаграма померања у правцу оптерећења на делу ab.

- Ако специфично оптерећење p схватимо као параметар једнако подељеног оптерећења као генералисане силе, ген. пом. које одговара тој сили је површина диј. померања оптерећеног дела носача.

- Сагласно теореми IV реакција било које спољашње или унутр. везе носача услед једнако подељеног оптер. једнака је дијагр. померања оптерећеног дела носача услед јединичног померања одговарајуће везе.

Нпр. трансверзална сила Tp носача на слици c.) једнака је дијаграму пом. у пољу ab. носача на слици d.)

(23) (54) МЕТОДА СИЛА. ПОЛАЗНЕ ј-НЕ И ПРЕТПОСТАВКЕ, РЕАКЦИЈЕ ОСЛОНАЦА И СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА СНН, ФОРМИРАЊЕ ОСНОВНОГ СИСТЕМА.

СНН – носачи у којима реакције ослонаца, моменти уклештења и силе у пресецима не могу да се одреде само из услова равнотеже тог носача.

Услови равнотеже:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum S_{ik}\cdot\cos\alpha_{ik} - \sum\frac{M_{ki}-M_{ik}}{l_{ik}}\cdot\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + H_i = 0\\
&\sum S_{ik}\cdot\sin\alpha_{ik} + \sum\frac{M_{ki}-M_{ik}}{l_{ik}}\cdot\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + V_i = 0\\
&\sum \varkappa_{ik} M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0
\end{aligned}\right\}(1)$$

где су:

$$\left.\begin{aligned}
&H_i^0 = P_{ix} + \frac{1}{2}\sum \bar{R}_x\cos\alpha_{ik} - \sum \bar{R}_y\cdot\xi_R'\sin\alpha_{ik}\\
&V_i^0 = P_{iy} + \frac{1}{2}\sum \bar{R}_x\sin\alpha_{ik} + \sum \bar{R}_y\cdot\xi_R\cos\alpha_{ik}
\end{aligned}\right\}(2)$$

Број услова равнотеже (1) једнак је $2k+m$.

У њима је непознато:

z_o – реакција ослонаца C_{oi}

z_u – момената уклештења C_{ui}

z_s – сила S_{ik}

z_{k+m} – момената $M_{ik}+M_{ki}$.

Када је бр. непознатих већи од броја ј-на:

$$z_o+z_u+z_s+z_{k+m} > 2k+m \quad \text{носач је СН.}$$

разлика између броја непознатих и броја ј-на:

$(z_o+z_u+z_s+z_k+m)-(2k+m)=n$ је број непознатих величина које могу да се изаберу произвољно а да услови равнотеже буду задовољени.
Те величине назвали смо СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНЕ (НЕОДРЕЂЕНЕ) ВЕЛИЧИНЕ НОСАЧА и бележимо их са $X_1, X_2 \dots X_n$. За СНВ могу да буду изабране или неке од непознатих C_j (C_{oj} или C_{uj}), S_{ik}, M_{ik}, или неке линеарне хомогене ф-је тих величина:

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_1\\
&F_2(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_2\\
&\text{-------------}\\
&F_n(C_j, S_{ik}, M_{ik}) = X_n
\end{aligned}\right\}(3)$$

Да би величине X дефинисане овим j-нама биле СНВ, ф-је F морају да буду међусобно независне од услова равнотеже (1).
У том случају n j-на (3) са $2k+m$ j-на (1) чине потпун систем од $z_0+z_u+z_s+z_u+m$ линеарних j-на са $z_0+z_u+z_s+z_u+m$ непознатих величина C_j, S_{ik}, M_{ik}.

Слободни чланови j-не (1) су величине $H_i^\circ, V_i^\circ, M_i^\circ$ које зависе само од оптерећења носача P, а слободни чланови j-не (3) су СНВ $X_1, X_2, \dots X_n$, па решење система j-на (1) и (3) могу да се одржавају као лин ф-је оптерећења P и величина $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Ако са:

$C_{j,0}, S_{ik,0}, M_{ik,0},$

$C_{j,1}, S_{ik,1}, M_{ik,1},$

$C_{j,2}, S_{ik,2}, M_{ik,2},$

- - - - - - - - -

$C_{j,n}, S_{ik,n}, M_{ik,n}$ означимо реакције ослонаца,

моменте уклештења, и СНВ појединих штапова које добијамо решењем система j-на (1) и (3) стављајући сукцесивно да је:

$P \neq 0, \; X_1=0, \; X_2=0, \dots X_n=0$

$P=0, \; X_1=1, \; X_2=0, \dots X_n=0$

$P=0, \; X_1=0, \; X_2=1, \dots X_n=0$

- - - - - - - - - - - - -

$P=0, \; X_1=0, \; X_2=0, \dots X_n=1$

општа решења ових jна могу да се одржавају у облику:

$$\left.\begin{aligned} C_j^\circ &= C_{j,0} + X_1 C_{j,1} + X_2 C_{j,2} + \dots X_n C_{j,n} \\ S_{ik} &= S_{ik,0} + X_1 S_{ik,1} + X_2 S_{ik,2} + \dots X_n S_{ik,n} \\ M_{ik} &= M_{ik,0} + X_1 M_{ik,1} + X_2 M_{ik,2} + \dots X_n M_{ik,n} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

I

$C_{j,0}, S_{ik,0}, M_{ik,0}$ ⇒ реакције ослонаца, моменти уклештења и СНВ штапова, равнотежног стања носача када је он оптерећен оптерећењем P, а кад су све СНВ носача једнаке нули.
то равнотежно стање зваћемо $\boxed{X_i = 0}$

II

$C_{j,m}, S_{ik,m}, M_{ik,m}$ $(m=1,\dots,n)$ ⇒ реакције ослонаца, моменти уклештења и СНВ штапова n међусобно независних РАВНОТЕЖНИХ СТАЊА НЕОПТЕРЕЋЕНОГ НОСАЧА, тј. n МЕЂУСОБНО НЕЗАВИСНИХ УНУТРАШЊИХ РАВНОТЕЖНИХ СТАЊА НОСАЧА.
При сваком од ових стања је једна од СНВ $=1$ а све остале $=0$, та стања зваћемо

СТАЊЕ $\boxed{X_1=1}$, $\boxed{X_2=1}$ ... $\boxed{X_n=1}$

Када изразе за силе S_{in} и моменте M_{in} дате ј-нама (4.2) и (4.3) унесемо у ј-не [(19) поглавље 11.3 књиге стр 28] ?

следи да и силе у произвољном пресеку носача могу да се прикажу као лин. ф-је СНВ у облику:

$$
\left.\begin{aligned}
N &= N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + \dots X_n N_n \\
T &= T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 + \dots X_n T_n \\
M &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots X_n M_n
\end{aligned}\right\} (5)
$$

где су: N_0, T_0, M_0

N_1, T_1, M_1

$\vdots$

N_n, T_n, M_n силе у пресецима стања $X_i = 0$ тј. силе у пресецима унутрашњих равнотежних стања $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots X_n = 1$.

Ако уместо произвољних линеарних ф-ја непознатих C_j, S_{ij}, M_{im} за СНВ изаберемо неке од непознатих спољашњих или унутрашњих сила, тј. ако за СНВ изаберемо одређене компоненте реакција спољашњих или унутрашњих веза носача, ј-не (4) и (5) имају једноставније статичко значење.

Реакције и силе у пресецима равнотежног стања $X_i = 0$, $C_{j,0}$, $M_{im,0}$, $S_{ij,0}$ односно N_0, T_0, M_0 представљају тада реакције и силе у пресецима које оптерећење P изазива у оном СОН који добијамо када из датог СНН уклонимо везе чије смо реакције изабрали за СНВ, а реакције и силе у пресецима равнотежног стања $X_m = 1$, $C_{j,m}$, $S_{ij,m}$, $M_{im,m}$ тј. N_m, T_m, M_m, представљају реакције и силе у пресецима тог СОН када на њега, као спољашње оптер., делује само $X_m = 1$.

Систем који добијамо када из датог СНН уклонимо везе чије смо реакције изабрали за СНВ називамо основни систем тог носача.

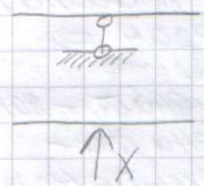
Реакције и силе у пресецима равнотежног стања $X_i = 0$ представљају утицаје у основном систему услед P, а реакције и силе у пресецима равнотежног стања $X_m = 1$ датог носача представљају утицаје у основном систему када је он оптерећен само силом $X_m = 1$.

Утицаји у основном систему биће једнаки утицајима у датом СН систему када у њему уклоњене везе заменимо њиховим реакцијама $X_1 - X_n$.

⇒ овај став следи из (4) и (5), и обрнуто ⇒ из овог става могу се написати ове ј-не.

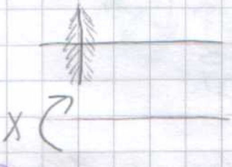
За формирање основног система имамо 4 могућности.

I



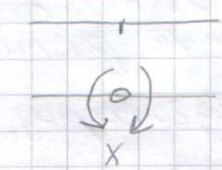
-Из датог носача можемо да уклонимо неки од његових ослонаца и тиме ослобођеном чвору омогућимо померање у правцу ослонца.
СНВ је тада реакција ослонца.

II



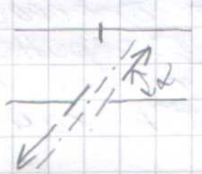
-Из датог носача можемо да уклонимо неко од његових уклештења и тиме уклештеном пресеку омогућимо обртање.
СНВ је тада моменат уклештења.

III



-У неком пресеку датог носача круту везу можемо да заменимо зглавкастом везом и тиме деловима лево и десно од пресека омогућимо релативно обртање.
СНВ је тада пар момената - моменат сав. у том пресеку носача.

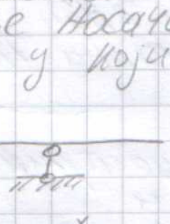
IV



-У неком пресеку датог носача круту везу можемо да заменимо клизајућим зглобом и тиме деловима лево и десно од тог пресека омогућимо релативно транслаторно померање у правцу који заклапа угао α са осом штапа.
СНВ је тада пар сила - компонента резултанте унутрашњих сила у том пресеку носача, а у правцу у коме је омогућено померање.

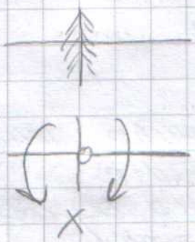
За $\alpha = 0$ клизајући зглоб прелази у подужни зглоб, а СНВ је нормална сила у посматраном пресеку, а за $\alpha = \pi/2$ клизајући зглоб постаје попречни зглоб, а СНВ је T сила у том пресеку.

Треба уочити разлику између СНВ које замењују утицај спољашњих веза носача - ослонаца и уклештења - и СНВ које замењују утицај унутрашњих веза носача. СНВ која замењује утицај неке спољашње везе носача је једна сила или један моменат, а СНВ која замењује утицај неке унутрашње везе носача је пар сила или пар момената. Ова разлика може да се избегне на тај начин што основни систем нећемо формирати уклањањем ослонаца и уклештења, већ уклањањем само везе носача и одговарајућег отруга на који је он ослоњен, тј. у који је он уклештен



-Да би уклонили везу носача и отруга на који је носач ослоњен довољно је пресећи ослоначки штап, тј. довољно је круту везу у неком пресеку тог штапа заменити подужним зглобом. (слика)
У том случају СНВ није само 1 сила, која замењује реакцију посматраног ослонца, већ је пар сила - аксијална сила у ослоначком штапу - које замењују и акцију и реакцију тог ослонца.

Да бисмо уклонили везу носача и ослонца у којој је носач укљештен довољно је другу везу штапа у укљештеном пресеку, или у њему бесконачно блиском пресеку, заменити зглавкастом везом ⇒



СНВ тада није само један моменат - мом. укљештења - већ пар момената - моменат савијања у укљештеном пресеку штапа.

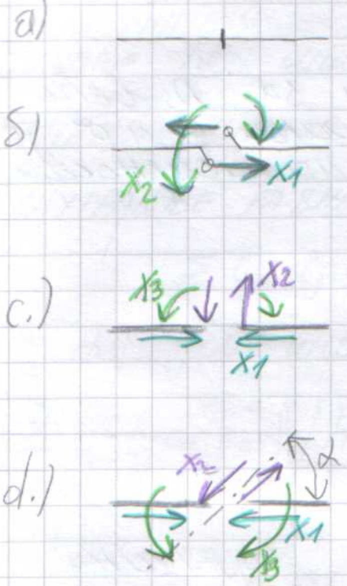
Основни систем који добијамо уклањањем ослонаца и укљештења и основни систем који добијамо уклањањем везе носача са одговарајућим опругама, суштински се не разликују, иако постоје извесне разлике.
Разликују се генерал. слична померања која одговарају СНВ у једном и у другом случају.

У првом случају ген. пом. су померања ослоњене тачке носача у правцу ослањања и обртање укљештеног пресека. Када су ослонци и укљештења крути, ова померања у датом носачу једнака су нули, али када су осл. и укљештење еластични ова померања постоје не само у основном већ и у датом СНН.

У другом случају ген. померања су промена одстојања између пресека пресеченог штапа и промене угла између потребног пресека штапа с једне стране зглоба и укљештења са друге стране. Без обзира да ли су осл. и укљ. крути или еластични ова пом. у датом носачу су увек једнака нули. Зато, основни систем у коме су све СНВ или парови сила или парови момената има извесне предности.

Ако у датом носачу постоје зглобови, за СНВ може да буде изабрана и одређена компонента силе везе у том зглобу.
Основни систем на том месту може да прими само силу везе нормалну на правац сила X, па зглоб замењујемо једним кратким конструктивним штапом чија је оса нормална на правац силе X.

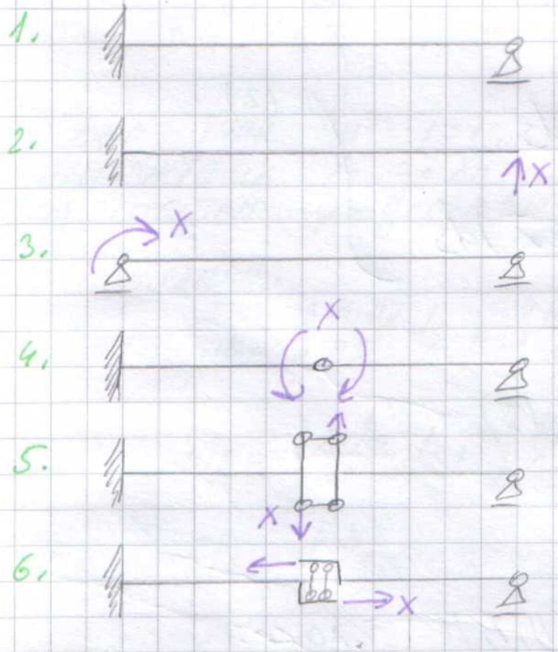
При формирању основног система непот вишеструко СНН у једном пресеку може да се уклони и више од 1 везе. У том случају утицај уклоњених веза замењујемо одговарајућим бројем СНВ.



Крута веза на слици а.) може да се замени везом на слици в.) преко које може да се пренесе само Т сила у том пресеку. СНВ на том месту су X_2 - мом. сав. и X_1 - нормална сила.

Ако у посматраном пресеку уклонимо све везе, тј. ако штап на том месту потпуно пресечено, СНВ су мом. сав и резултанта унутрашњих сила у том пресеку која је тада непозната и по величини и по правцу, ову резулт. замењујемо њеним компонентама. Обично су то компоненте у правцу осе и управно на правац осе, тј. Н и Т сила у том пресеку. (слика с.)
Некада је корисно знати да за СН силе изаберемо и неке друге компоненте резултанте унутр. сила, нпр. компоненте у правцу осе штапа и на правац који са осом заклапа угао α. [слика d.)]

На слици 1. приказан је 1. СНН, а могућности за СНВ на сликама 2. 3. 4. 5. 6.



И поред широких могућности у избору СНВ, оне ипак не могу бити изабране произвољно.

Статички неодређене величине $X_1, X_2 .. X_n$ не могу да буду силе и моменти који могу да се срачунају из услова равнотеже носача, нити величине од којих може да се формира ма и једна линеарна форма $a_1X_1 + a_2X_2 + .. a_nX_n$ чија вредност може да се срачуна из тих услова.

За СНВ може да буде изабран само онај систем сила и момената који одговара статички одређен, тј. кинематички просто стабилан основни систем.

(24) (55) МЕТОДА СИЛА. УСЛОВНЕ Ј-НЕ ЗА СНВ.

Ако је у носачу број статичких величина за n већи од броја услова равнотеже, број померања u и v је за n мањи од броја услова компатибилности померања чворова:

$$\left.\begin{aligned} F_1(i,k) &= \Delta l_{ik} \\ F_2(i,k) - F_2(i,r) &= \tau_{ir} - \tau_{ik} \\ u_i \cos\beta_i + v_i \sin\beta_i &= c_{oi} \\ F_2(i,k) &= c_{ui} - \tau_{ik} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Када из овог система од $z_s + z_u + z_o + z_u$ једначина елиминишемо $2k$ померања u и v добијамо $(z_s + z_u + z_u + z_o) - 2k$ ј-на у којима фигуришу само деформацијске величине штапова Δl и τ, померања ослонаца c_o и обртања укљештења c_u.

Ови услови представљају **услове компатибилности деформације датог носача**, када у те услове за Δl_{ik}, τ_{ik} и τ_{ki} унесемо вредности:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l_{ik} &= \int_i^k (\bar{\eta}\,\kappa + \varepsilon \cos\bar{\alpha} - \psi_T \sin\bar{\alpha})\,ds \\ \tau_{ik} &= \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (\bar{\xi}' l_{ik} \cdot \kappa - \varepsilon \cdot \sin\bar{\alpha} - \psi_T \cdot \cos\bar{\alpha})\,ds \\ \tau_{ki} &= -\frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (\bar{\xi} l_{ik} \cdot \kappa + \varepsilon \sin\bar{\alpha} + \psi_T \cdot \cos\bar{\alpha})\,ds \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где је:

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \cdot \frac{\Delta t^\circ}{h} \\ \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t^\circ \\ \psi_T &= k \frac{T}{GF} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

А у којима силе у пресецима N, T, M гласе:

$$\left.\begin{aligned} N &= N_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot N_k \\ T &= T_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k T_k \\ M &= M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k M_k \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

добијамо **условне једначине за СНВ** тј. добијамо n ј-на у којима су непознате само величине од X_1 до X_n. Решењем тих ј-на добијамо $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Овај поступак се не користи за компликоване СНН.
Надаље ће бити приказана 3 начина извођења ј-на.

1) ПРИНЦИП ВИРТУАЛНИХ СИЛА

УНУТРАШЊЕ РАВНОТЕЖНО СТАЊЕ $X_i^\circ = 1 \Rightarrow$

$$\sum c_{ji} \cdot c_j = \int_S (M_i \varkappa + N_i \cdot \varepsilon + T_i \cdot \psi_T) ds$$

У њу убацимо (3) и (4)

$$\Rightarrow \sum c_{ji} \cdot c_j = \int_S \Big[M_i \Big[\frac{1}{EI} \Big(M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k M_k \Big) + \alpha_t \cdot \frac{\Delta t^\circ}{h} \Big] +$$

$$+ N_i^\circ \Big[\frac{1}{EF} \Big(N_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k N_k \Big) + \alpha_t \cdot t^\circ \Big] + T_i^\circ \frac{k}{GF} \Big[T_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot T_k \Big] \Big] ds$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \Big(\int_S \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int_S \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int_S k \frac{T_i \cdot T_k}{GF} ds \Big) +$$

$$+ \Big(\int_S \frac{M_i M_0}{EI} ds + \int_S \frac{N_i N_0}{EF} ds + \int_S k \frac{T_i T_0}{GF} ds \Big) +$$

$$+ \Big(\int_S M_i^\circ \alpha_t \cdot \frac{\Delta t^\circ}{h} \cdot ds + \int_S N_i^\circ \cdot \alpha_t \cdot t^\circ \cdot ds \Big) - \sum c_{ji} c_j = 0$$

Из ове ј-не за $i = 1 \ldots n$ добијамо систем од n ј-на са n непознатих X_1 до X_n.
Овај систем представља условне ј-не за СНВ.
Са ознакама:

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{ik} &= \int_S \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int_S \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int_S \frac{T_i T_k}{GF} k \cdot ds \\
\delta_{i0} &= \int_S \frac{M_i M_0}{EI} ds + \int_S \frac{N_i N_0}{EF} ds + \int_S k \frac{T_i T_0}{GF} ds \\
\delta_{it} &= \int_S M_i \alpha_t \cdot \frac{\Delta t^\circ}{h} ds + \int_S N_i \alpha_t \cdot t^\circ ds \\
\delta_{ic} &= - \sum c_{ij} c_j
\end{aligned}\right\} (6)$$

и ознаком:

$$\delta_{i\otimes} = \delta_{i0} + \delta_{it} + \delta_{ic} \qquad \Big\} (7)$$

оне могу да се напишу:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \delta_{ik} + \delta_{i\otimes} = 0 \quad , \ i = 1, 2, \ldots n \qquad \Big\} (8)$$

У развијеном облику:

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\cdot\delta_{12} + \ldots + X_n\cdot\delta_{1n} + \delta_{1\otimes} &= 0\\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \ldots + X_n\delta_{2n} + \delta_{2\otimes} &= 0\\ \vdots \qquad\qquad &\vdots\\ X_1\delta_{n1} + X_2\delta_{n2} + \ldots + X_n\delta_{nn} + \delta_{n\otimes} &= 0 \end{aligned}\right\} (9)$$

Условне ј-не за СНВ често пишемо:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1\otimes} \\ \delta_{2\otimes} \\ \vdots \\ \delta_{n\otimes} \end{bmatrix} = 0 \qquad (10)$$

тј.

$$\boxed{DX + d = 0} \qquad (11)$$

где је:

$$\left.\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = [\delta_{ik}] \;; \\ X &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} ; \quad d = \begin{bmatrix} \delta_{1\otimes} \\ \delta_{2\otimes} \\ \vdots \\ \delta_{n\otimes} \end{bmatrix} ; \end{aligned}\right\} (12)$$

Коефицијенти уз непознате у условним ј-нама за СНВ, тј. елементи матрице D дати су ј-ном 6.1. из које => коефицијент δ_{ik} у k-тој ј-ни уз непознату X_i једнак коефицијенту δ_{ki} у i-тој ј-на уз непознату X_k.

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \qquad (13)$$

односно => матрица D је симетрична.

Елементи главне дијагонале D, сагласно 6.1., дати су:

$$\delta_{ii}^{\circ} = \int_S \frac{M_i^2}{EI} ds + \int_S \frac{N_i^{\circ 2}}{EF} ds + \int_S k\frac{T_i^2}{GF} ds \qquad (14)$$

и као интеграли позитивних ф-ја: $\frac{M_i^2}{EI}$, $\frac{N_i^2}{EF}$ и $k\frac{T_i^2}{GF}$

увек су веће од нуле $\delta_{ii} > 0$. (15)

док остали елементи:

$$\delta_{ik} \gtreqless 0 \quad , \quad i \neq k \qquad (16)$$

-За два унутрашња равнотежна стања, стање $\boxed{X_k=1}$ коме одговарају силе у пресецима M_k, T_k и N_k, и стање $\boxed{X_i=1}$ коме одговарају силе у пресецима M_i, T_i, N_i, кажемо да су **ортогонална стања** када је њима одговарајући елеменат матрице условних ј-на $\delta_{ik}=0$.

-Најповољнији систем СНВ је онај за који су вандијагонални елементи матрице условних ј-на једнаки нули, тј. оном коме одговара **потпун систем ортогоналних равнотежних стања.**

Таквом систему унутрашњих равнотежних стања одговарају међусобно независне условне ј-не са дијагоналном матрицом D.

Сваком n пута СНН одговара један систем од n ортогоналних равнотежних стања.

* Изведене ј-не важе за пун носач. За решеткаст носач, чији штапови примају само аксијалне силе, принцип вирт. сила написан за унутрашње равнотежно стање $\boxed{X_i=1}$ гласи

$$\sum c_{ji} c_j = \int_S N_i \varepsilon \, ds = \sum_S N_i \int_S \varepsilon \, ds$$

тј.

$$\sum c_{ji} c_j = \sum_S S_i \Delta l \qquad (17)$$

S_i - аксијална сила у произвољном штапу решетке при стању $X_i = 1$

Δl - стварна промена дужине тог штапа: $\Delta l = \frac{S l}{EF} + \alpha_t \cdot t^\circ \cdot l$ (18)

при чему сила у штапу S датог СНН услед датих спољашњих утицаја може да се прикаже:

$$(19) \qquad S = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k S_k \qquad (\text{сагласно } (4))$$

Из (17), (18), (19) добијамо

$$\sum_j c_{ji} c_j = \sum_S S_i \left[\frac{l}{EF} \left(S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k S_k \right) + \alpha_t \cdot t^\circ \cdot l \right]$$

тј.

$$\sum_k X_k \left(\sum_S \frac{S_i S_k}{EF} l \right) + \sum_S \frac{S_i S_0}{EF} l + \sum_S S_i \alpha_t \cdot t^\circ \cdot l - \sum c_{ji} c_j = 0 \qquad (20)$$

$$i = 1, 2, \ldots n$$

са ознакама:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ik} &= \sum_S \frac{S_i S_k}{EF} l \\ \delta_{i0} &= \sum_S \frac{S_i S_0}{EF} l \\ \delta_{it} &= \sum_S S_i \alpha_t \cdot t^\circ l \\ \delta_{ic} &= -\sum c_{ji} c_j \end{aligned}\right\} (21)$$

и са раније уведеним ознакама (7), систем (20) прелази у (8) (за њега важи све већ речено)

МЕТОДА СИЛА. ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ КОЕФИЦИЈЕНАТА УСЛОВНИХ Ј-НА, УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ ЗА СНВ И РЕАКЦИЈЕ ОСЛОНАЦА, СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА И ПОМЕРАЊА СНН.

(25) (56)

Са δ_a означимо померање у СНН на месту a услед задатих спољашњих утицаја, а са δ_{az} одговарајуће померање у основном систему услед утицаја z и то:

δ_{a0} - услед оптерећења P

δ_{at} - услед температурних промена t° и Δt°

δ_{ac} - услед померања ослонаца c_i

δ_{ai} - услед силе $X_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

тада

$$\delta_a = \delta_{a0} + \delta_{at} + \delta_{ac} + X_1 \cdot \delta_{a1} + X_2 \delta_{a2} + \ldots + X_n \delta_{an} \quad (1)$$

тј.

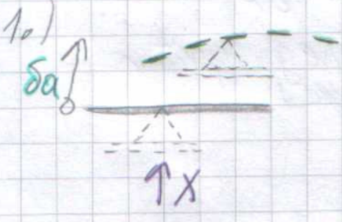
$$\delta_a = \delta_{a\otimes} + \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \delta_{ai} \quad (2)$$

$$\delta_{a\otimes} = \delta_{a0} + \delta_{at} + \delta_{ac}$$

Условне ј-не за СНВ добићемо из (1) тј. (2) када уочимо да су у датом СНН ген. пом. δ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ која одговарају СНВ X_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ као генералисаним силама једнака нули.

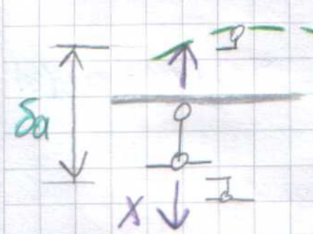
ГЕНЕРАЛИСАНА померања која одговарају СНВ као ген. силама приказана су на сликама:

1.)



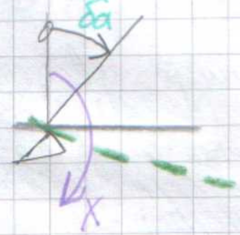
- када је СН реакција неког ослонца, одговарајуће ген. пом. је компонента пом. ослоњене тачке носача у правцу ослонца.

2.)

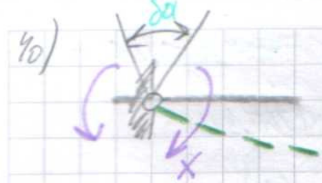


- када је СН аксијална сила (пар сила) ослоначког штапа генералисано померање је релативно померање те тачке у односу на опору.

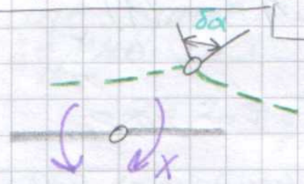
3.)



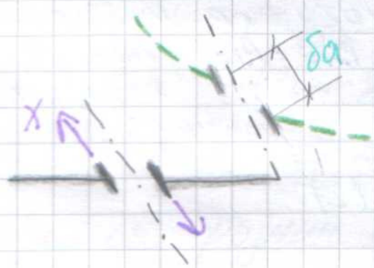
- када је СН момент неког уклештења, одговарајуће генералисано померање је обртање уклештеног пресека.

4а) 

– када је СН моменат савијања (пар момената) у уклештеном пресеку носача, генералисано померање је релативно обртање тог пресека у односу на ослонац.

5а) 

– када је СН моменат савијања у пресеку, одговарајуће генералисано померање је релативно обртање бесконачно блиских пресека с једне и друге стране пресека.

6а) 

– када је СН компонента резултанте унутрашњих сила у пресеку, а у правцу који са осом носача заклапа угао α, генералисано померање је релативно транслаторно померање бесконачно блиских пресека у том правцу.

У датом СНН ова померања једнака су нули. [Изузетак померања еластичних ослонаца и обртања еласт. укљ.]

У основном систему датог носача ова померања различита су од нуле

Померања δ_{i0}, δ_{it}, δ_{ic}, δ_{ik}, $k=1,2,\dots,n$ од оптерећења, темп. промена, померања ослонаца и сила $X_k=1$, $k=1,2,\dots n$. сагласно претходно изведеним изразима дати су ј-нама (6) прошло питање

Услови да су померања δ_i, $i=1,2,\dots,n$, у датом носачу једнака нули на основу (2) могу да се напишу

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \delta_{ik} + \delta_{i0} = 0, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Тиме смо дошли до условних ј-на за СНВ које се од ј-на (8) из прошлог питања разликују по томе што величине X_k, δ_{ik}, δ_{i0} имају ужа и конкретнија значења.

⇒

I УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ ЗА СНВ

Из условних ј-на за СНВ једног n пута СНН:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \delta_{ik} + \delta_{i0} = 0 \quad , i=1,2,\dots n \qquad (1)$$

у којима су:

$\delta_{ik} = \delta_{ki}$ $[i=1,2\dots n, \; k=1,2\dots n]$ ⇒ елементи матрице условних ј-на

δ_{i0} $[i=1,2,\dots n]$ ⇒ слободни чланови у условним ј-нама, који зависе од оптерећења;

$\boxed{\text{општа решења за СНВ}}$ X_k, $k=1,2\dots n$, могу се написати у ф-ји слободних чланова и елемената $\beta_{ik}=\beta_{ki}$, $i=1,2,\dots n$, $k=1,2,\dots n$, инверзне матрице условних ј-на за СНВ у облику:

$$\boxed{X_k = -\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} \cdot \delta_{i0}} \quad , k=1,2,\dots n \qquad (2)$$

Када се на носачу налазе само сила $P=1$, слободни чланови δ_{i0}, $i=1,2,\dots n$, представљају ген. померања на местима деловања СНВ X_i, $i=1,2,\dots n$, у основном систему датог СНН услед силе $P=1$.

Ако се сила $P=1$ помера по носачу, δ_{i0} представља утицајну линију која је једнака дијаграму померања δ_{0i} оптерећеног потеза штапова у основном систему при стању статички неодређене $X_i=1$.

Утицајне линије за СНВ X_k, $k=1,2,\dots n$ добијамо из општег решења (2), пошто су претходно одређени сви дијаграми померања δ_{0i}, $i=1,2,\dots n$, односно све утицајне линије за генералисана померања δ_{i0}, $i=1,2,\dots n$ у облику:

$$X_k = -\sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} \delta_{0i} \; , \; k=1,2,\dots n \qquad (3)$$

Међутим, утицајне линије за СНВ могу се одредити непосредније ако десну страну ј-не (3) схватимо као утицајну линију за ген. пом. δ_k која је једнака диј. померања услед истовременог деловања свих СНВ чији су интензитети $X_i=\beta_{ik}$, $i=1,2,\dots n$, тада су утицајне линије за СНВ X_k:

$$\boxed{X_k = -\delta_k} \; , \; k=1,2,\dots n \qquad (4)$$

Дијаграм померања δ_k одређујемо уобичајено, као диј. фиктивних момената фиктивног носача у коме су гранични и прелазни услови по фиктивним силама једнаки граничним и прелазним условима по померањима оптерећеног потеза штапова које одговарају стању померања $\delta_{k0}=1$ датог носача, тј. одговарају оном стању померања при коме су остала померања $\delta_{j0}=0$ за $j \neq k$ и при коме су вредности СНВ $X_i=\beta_{ik}$, $i=1,2,\dots n$, једнаке вредностима елемената инверзне матрице условних ј-на.

II УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ ЗА РЕАКЦИЈЕ И СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА.

-Када су познате ут. лин. за СНВ X_k, $k=1,2,\dots,n$, ут. лин за остале статичке утицаје z, за реакције ослонаца, реакције уклештења и силе у пресецима СНН одређујемо на основу принципа суперпозиције

$$Z = Z_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot X_k \quad (5)$$

где: Z_0 - утицајна линија за утицај Z у основном систему

Z_k - вредност утицаја Z у основном систему при стању $X_k = 1$, $k=1,2,\dots,n$.

X_k - утицајна линија за СНВ X_k, $k=1,2,\dots,n$.

Ако ј-ну (5), за утицајну линију X_k унесемо израз (3) она се може приказати у облику:

$$Z = Z_0 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} Z_k \cdot \beta_{ki} \delta_{0i}$$

који са бројним константама $= -\sum_{k=1}^{n} Z_k \beta_{ki}$, $i=1,2,\dots,n$

гласи: $$Z = Z_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \delta_{0i} \quad (6)$$

путем којег се у случајевима када утицајне линије за СНВ нису неопходне, могу да се одреде ут. лин. за статичке утицаје Z у СНН.

III УТИЦАЈНЕ ЛИНИЈЕ ЗА ПОМЕРАЊА

Ут. лин. за померања δ у СНН могу да се одреде на основу принципа суперпозиције, према изразу

$$\delta = \delta_0 + \sum_{k=1}^{n} \delta_k X_k \quad (7)$$

где су:

δ_0 - утицајна линија за померање δ у основном систему.

δ_k - вредност померања δ у основном систему при стању X_k $k=1,2,\dots,n$.

У ј-ни (7) поред ут. лин. за померање δ_0 у основном систему, треба посебно срачунавати померања δ_k, $k=1,2,\dots,n$ што није случај са статичким утицајима Z_k, $k=1,2,\dots,n$ у изразу (5) који представљају основне и неопходне величине за одређивање коефицијената и слободних чланова у условним ј-нама методе сила (1). па је овај поступак непогодан за одређивање ут. лин. за померања у СНН.

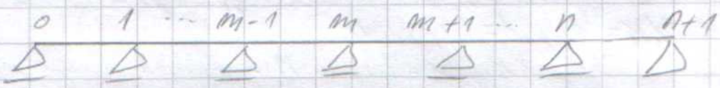
Ут. лин. за померање δ у СНН одређујемо на основу принципа виртуалних сила, када у изразе за виртуелно оптерећење унесемо стварне вредности реакција и сила у пресецима СНН услед деловања јединичне генералисане силе.

(26) (57) КОНТИНУАЛНИ НОСАЧИ. ИЗБОР ОСНОВНОГ СИСТЕМА, УСЛОВНЕ ј-НЕ, ФИЗИЧКО ЗНАЧЕЊЕ КОЕФИЦИЈЕНАТА УСЛОВНИХ ј-НА, ПОЈАМ ЛЕВЕ И ДЕСНЕ СТАЛНЕ ТАЧКЕ.

Носач који се састоји од једног правог штапа у коме је број сувишних елемената, тј. број ослонаца z_o и број уклештења z_n, већи од 3 — $z_o + z_n > 3$ назива се **континуалан носач**.

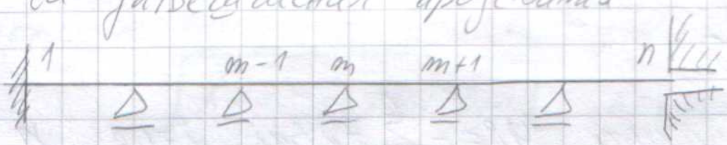
Може бити:

1. Са слободно ослоњеним крајевима



⇒ бр. ослонаца $= n+3$
бр. поља $= n+1$

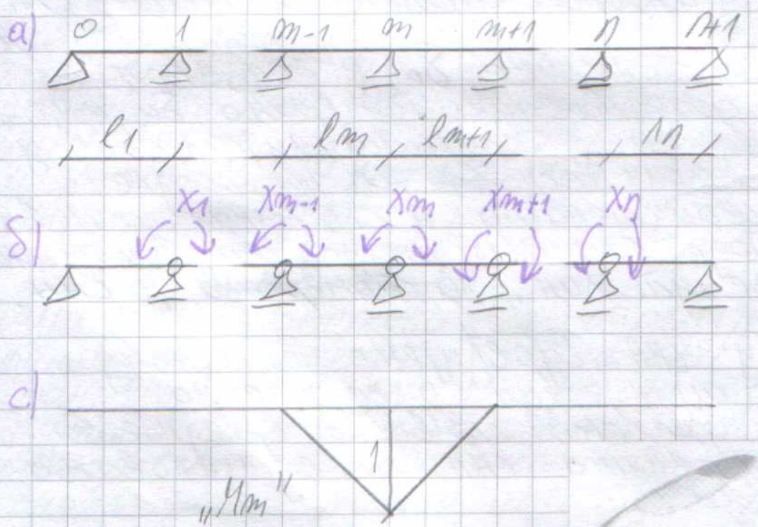
2. Са уклештеним крајевима



Део носача између суседних ослонаца називамо пољем, а дужину поља – распоном поља, и означавамо их индексом десног ослонца.

У континуалном носачу са уклештеним крајевима уместо уклештења може да се замени са једним пољем константног момента инерције I распона l, чији је однос $\frac{l}{I}$ једнак 0. Тада је дати носач статички еквивалентан носач на слици 1. (са слоб. крај.) чија су крајња поља или са распонима једнаким нули или са бесконачно великим моментима инерције, па ћемо у наставку посматрати носач са слоб. крајевима.

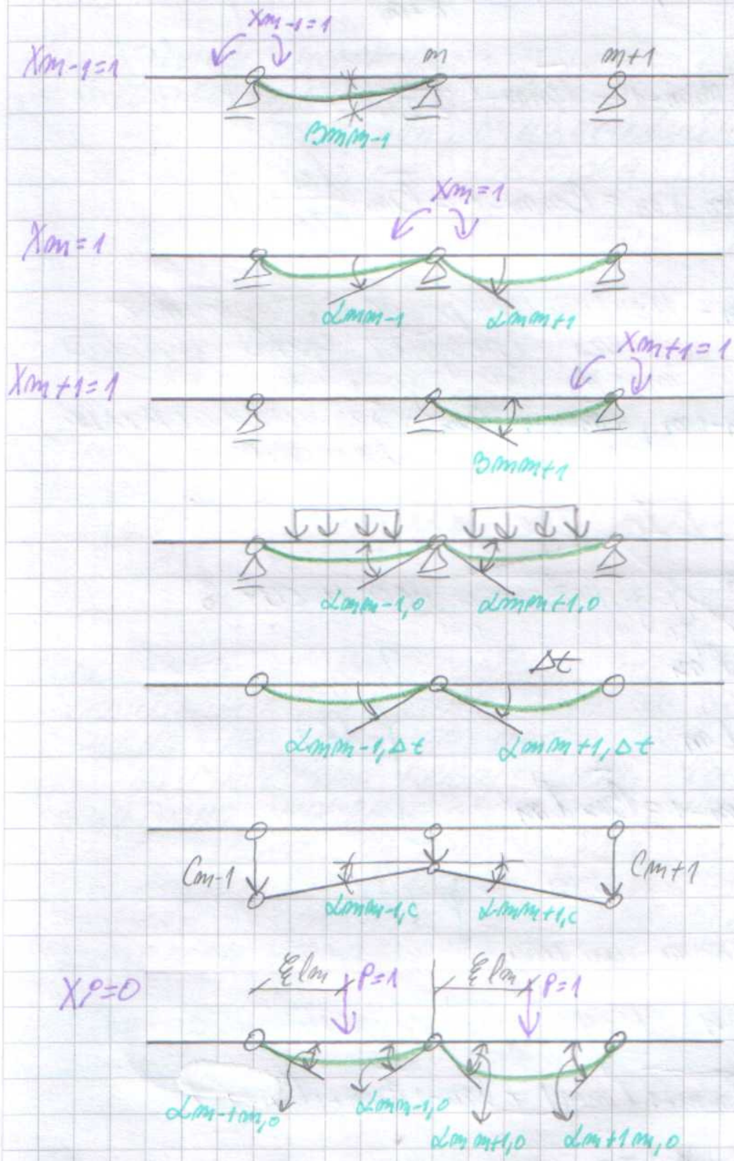
Носач на слици 1. је n пута статички неодређен. За СНВ усвајамо моменте савијања на међуослонцима, тј. за основни систем носача усвајамо систем међусобно зглавкасто везаних простих греда. (СЛИКА б))



У оваквом основном систему утицаји при стању $\boxed{X_m=1}$ постоје само у пољима m-1, m и m, m+1. (СЛИКА c.)), ⇒
- у условној ј-ни за промену угла између поређних пресека на крајевима штапа код ослонца m у основном систему конт. носача са непомерљивим ослонцима, поред СНВ X_{m-1}, X_m, X_{m+1} утицаће и сила $P=1$ када се налази у пољима поред ослонца m.

У матрици условних ј-на поред дијагоналних елемената δ_{mm}, различити од нуле су елементи $\delta_{m,m+1}$ непосредно изнад главне дијагонале и елементи $\delta_{m,m-1}$ испод те дијагонале. Условне ј-не за СНВ дате су:

$$\left.\begin{aligned} &X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \delta_{1\otimes} = 0 \\ &X_{m-1} \delta_{m,m-1} + X_m \delta_{mm} + X_{m+1} \delta_{m,m+1} + \delta_{m\otimes} = 0 \\ &X_{n-1} \delta_{n,n-1} + X_n \delta_{nn} + \delta_{n\otimes} = 0 \end{aligned}\right\} (1)$$



Сагласно ознакама на сликама:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{mm-1} = \beta_{mm-1} \\ &\delta_{mm} = \alpha_{mm-1} + \alpha_{mm+1} \\ &\delta_{mm+1} = \beta_{mm+1} \\ &\delta_{m\otimes} = \alpha_{mm-1,\otimes} + \alpha_{mm+1,\otimes} \end{aligned}\right\} (2)$$

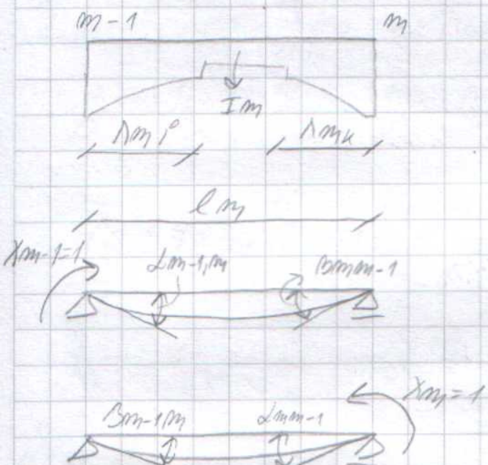
где је:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{mm-1\otimes} = \alpha_{mm-1,0} + \alpha_{mm-1,\Delta t} + \alpha_{mm-1,c} \\ &\alpha_{mm+1\otimes} = \alpha_{mm+1,0} + \alpha_{mm+1,\Delta t} + \alpha_{mm+1,c} \end{aligned}\right\} (3)$$

За m-та j-на система (1) може да се напише:

$$X_{m-1}\beta_{mm-1} + X_m(\alpha_{mm-1} + \alpha_{mm+1}) + X_{m+1}\beta_{mm+1} + (\alpha_{mm-1,0} + \alpha_{mm+1,0}) = 0 \quad (4)$$

Углове обртања тангенти на пројекцијама штапа m-1,m услед јединичног момента $X_{m-1}=1$ тј. мом. $X_m = 1$ рачунамо:



$$\left.\begin{aligned} \alpha_{m-1m} &= \bar{\alpha}_{m-1m}\frac{l_m}{EI_m} \\ \alpha_{mm-1} &= \bar{\alpha}_{mm-1}\frac{l_m}{EI_m} \\ \beta_{m-1m} &= \beta_{mm-1} = \bar{\beta}_m\frac{l_m}{EI_m} \end{aligned}\right\} (5)$$

I_m - момент инерције попречног пресека средњег дела штапа m-1,m а где су $\bar{\alpha}_{m-1m}, \bar{\alpha}_{mm-1}, \bar{\beta}_m$ - бездимензионалне величине.

-Кад j-ну (5) помножимо са EI_c где је I_c - упоредни моменат инерције јединствен за цео носач:

$$\left.\begin{aligned} EI_c\,\alpha_{m-1m} &= \bar{\alpha}_{m-1m}\, l'_m \\ EI_c\,\alpha_{mm-1} &= \bar{\alpha}_{mm-1}\, l'_m \\ EI_c\,\beta_{m-1m} &= EI_c\,\beta_{mm-1} = \bar{\beta}_m\, l'_m \end{aligned}\right\} (6)$$

где је:

$$l'_m = l_m\frac{I_c}{I_m} \quad (7)$$

↳редукована дужина штапа.

Са овим вредностима j-на (4) може да се напише:

$$X_{m-1}\bar{\beta}_m l'_m + X_m(\bar{\alpha}_{mm-1} l'_m + \bar{\alpha}_{mm+1} l'_{m+1}) + X_{m+1}\bar{\beta}_{m+1} l'_{m+1} + EI_c(\alpha_{mm-1,0} + \alpha_{mm+1,0}) = 0$$

За носач са константним попречним пресеком по пољима је

$$\bar{\alpha}_{mm-1} = \bar{\alpha}_{mm+1} = \frac{1}{3}, \quad \bar{\beta}_m = \bar{\beta}_{m+1} = \frac{1}{6} \quad (8)$$

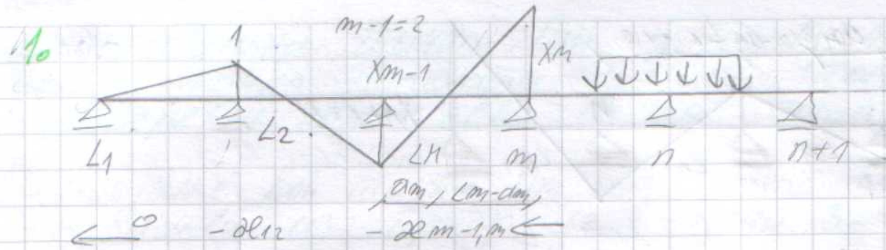
па једначина (8) помножена са 6, гласи:

$$(9) \quad X_{m-1}l'_m + 2X_m(l'_m + l'_{m+1}) + X_{m+1}l'_{m+1} + 6EI_c(\alpha_{mm-1,0} + \alpha_{mm+1,0}) = 0$$

Континуалном носачу са једнаким пољима и const мом. инерције дуж носача одговара m-та j-на: [(9)/l]

$$X_{m-1} + 4X_m + X_{m+1} + \frac{6EI}{l}(\alpha_{mm-1,0} + \alpha_{mm+1,0}) = 0$$

1o



Када је носач оптерећен само на делу десно од m као на слици, тада је

$$\delta_{1\alpha} = \delta_{2\alpha} = \dots = \delta_{m-1\,\alpha} = 0$$

Дијаграми момената у неоптерећеним пољима 0-1 до m-1,m су праве линије. Моменте $X_{m-1}, \dots, X_2, X_1$, добијамо полазећи од момената X_m, сукцесивним множењем са $\varkappa$-бројевима из елиминације уназад: [КАСНИЈЕ ОБЈАШЊЕНИ]

$$X_{m-1} = -\varkappa_{m-1,m} X_m \quad \text{тј.} \quad \frac{X_{m-1}}{X_m} = -\varkappa_{m-1,m}$$

$$X_{m-2} = -\varkappa_{m-2,m-1} X_{m-1} \quad \text{тј.} \quad \frac{X_{m-2}}{X_{m-1}} = -\varkappa_{m-2,m-1} \qquad (10)$$

$$X_1 = -\varkappa_{12} X_2 \quad , \text{тј.} \quad \frac{X_1}{X_2} = -\varkappa_{12}$$

С обзиром да $\varkappa$ бројеви зависе само од димензија носача а не зависе од оптерећења, а да су у датом случају позитивни и мањи од 1:

$0 < \varkappa < 1$ из ј-на (10) $\Rightarrow$ да моменти над ослонцима на неоптерећеном делу континуалног носача стоје у константним односима који не зависе од оптерећења, да они с десна на лево по апсолутној вредности стално опадају, и да наизменично мењају знак. Сагласно овом, нулте тачке дијаграма момената у пољима неоптерећеног дела носача не зависе од оптерећења и леже ближе левом ослонцу одговарајућег поља. Те тачке називамо ЛЕВЕ СТАЛНЕ ТАЧКЕ НОСАЧА и обележавамо их словом L и индексом поља.

Лева стална тачка L_m у пољу m-1,m је нулта тачка момената у том пољу када је носач оптерећен само десно од тог поља.

Одстојање a_m тачке L_m од левог ослонца поља m-1,m налазимо из пропорције са слике:

услов да је момент = 0

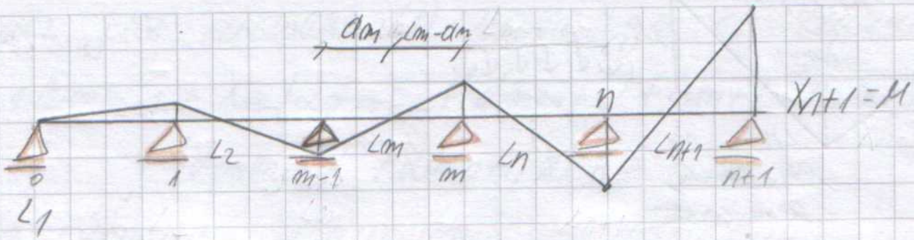
$$\frac{a_m}{l_m - a_m} = \left| \frac{X_{m-1}}{X_m} \right| = \varkappa_{m-1,m} \Rightarrow$$

$$a_m = l_m \cdot \frac{\varkappa_{m-1,m}}{1 + \varkappa_{m-1,m}} \qquad (11)$$

↓

бездимензионална вредност!

2o



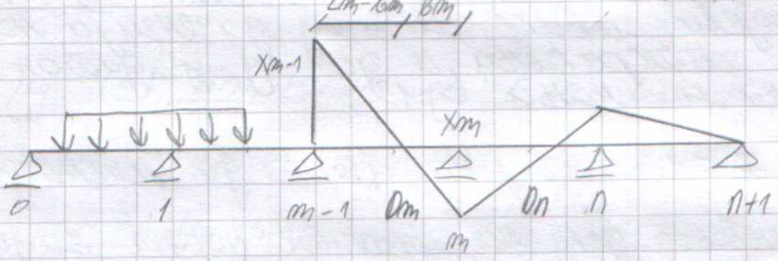
$\leftarrow 0 \quad -\varkappa_{12} \quad -\varkappa_{m-1,m} \quad -\varkappa_{n-1,n} \quad -\varkappa_{n,n+1} \leftarrow$

Да би из (11) могли да одредимо и положај сталне тачке L_{n+1} у пољу $n+1$, тј. положај нулте тачке момената у том пољу када је носач као на горњој 2o слици оптерећен само концентрисаним моментом X_{n+1} на крајњем десном ослонцу, уводимо:

$$X_{n,n+1} = \frac{\delta_{n,n-1}}{\delta_{nn}^{(n-1)}} = \frac{\beta_{n,n+1}}{\delta_{nn}^{(n-1)}} \qquad (12)$$

која представља: $\frac{X_n}{X_{n+1}} = -\varkappa_{n,n+1}$. и према ј-ни (10) одређује положај нулте тачке L_{n+1}.

3o



$\rightarrow \quad -\varkappa_{m,m-1} \quad -\varkappa_{n,n-1} \quad 0 \rightarrow$

Када је носач оптерећен само на делу лево од $m-1$, слика 3o тада је

$$\delta_{m0} = \delta_{m+1,0} = \dots = \delta_{n0} = 0$$

Дијаграми момената у неоптерећеним пољима од $m-1,m$ до $n,n+1$ су праве линије, а моменте $X_m, X_{m-1}, \dots, X_n$ добијамо полазећи од момената X_{m-1} сукцесивним множењем тих момената са $\varkappa$-бројевима из елиминације уназад:

$$X_m = -\varkappa_{m,m-1} X_{m-1} \quad \text{тј.} \quad \frac{X_m}{X_{m-1}} = -\varkappa_{m,m-1}$$

$$X_{m-1} = -\varkappa_{m+1,m} X_m \qquad \frac{X_{m+1}}{X_m} = -\varkappa_{m+1,m}$$

- - - - - - - - - -

$$X_n = -\varkappa_{n,n-1} X_{n-1} \qquad \frac{X_n}{X_{n-1}} = -\varkappa_{n,n-1} \qquad (13)$$

То следи да нулте тачке дијаг. мом. у неоптер. пољима носача ни у овом случају не зависе од оптер. и да леже ближе десном ослонцу одговарајућег поља.

Те тачке називамо десне сталне тачке носача, а обележавамо их словом D и индексом поља.

Десна стална тачка D_m у пољу $m-1,m$ је нулта тачка момената у том пољу када је носач оптерећен само лево од тог поља.

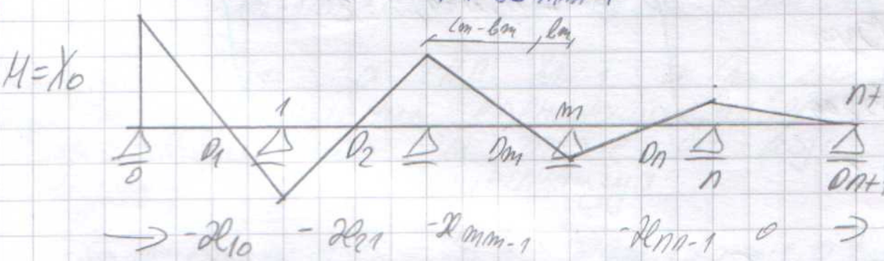
Одстојање b_m тачке D_m од десног ослонца поља $m-1,m$ налазимо из пропорције, слика 3_0

$$\frac{b_m}{l_m - b_m} = \left|\frac{X_m}{X_{m-1}}\right| = \varkappa_{m,m-1}$$

одавде је:

$$b_m = l_m \frac{\varkappa_{m,m-1}}{1+\varkappa_{m,m-1}} \qquad (14)$$

4_0



Да бисмо из ј-не (14) могли да одредимо и положај сталне тачке D_1 у пољу 0-1, тј. положај нулте тачке момената у том пољу када је носач као на слици 4_0 оптерећен само концентрисаним моментом X_0 на крајњем левом ослонцу, уводимо величину

$$X_{10} = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}^{(n-1)}} = \frac{\beta_{10}}{\delta_{11}^{(n-1)}} \qquad (15)$$

која представља:

$\frac{X_1}{X_0} = -\varkappa_{10}$ и која сагласно (14) одређује положај D.

КОНТИНУАЛНИ НОСАЧ - УКЉЕШТЕН НА КРАЈЕВИМА - СТР 377
ДА ЛИ СМО РАДИЛИ?

Квадратна симетрична матрица формирана од коефицијената уз СНВ у условним ј-нама (1) δ_{mk}, $m=1,2,\dots n$, $k=1,2,\dots n$. у којој су елементи $\delta_{mk}=0$ када је $|m-k|>1$ састоји се само од три дијагонална реда елемената различитих од нуле.

Елементе инверзне матрице условних ј-на $\beta_{mk}=\beta_{km}$, $m=1,2,\dots n$, $k=1,2,\dots n$, можемо да одредимо путем одговарајућих дијагоналних елемената матрице условних ј-на и $\varkappa$ коефицијената из поступка ЕЛИМИНАЦИЈЕ УНАПРЕД или из ЕЛИМИНАЦИЈЕ УНАЗАД.

Дијагонални елементи матрице условних ј-на, $\varkappa$ коефицијенти, дијагонални елементи β_{mm} и вандијагонални елементи инверзне матрице β_{mk} описани су следећим изразима, из поступка ЕЛИМИНАЦИЈЕ УНАПРЕД

⇒

$$\delta_{mm}^{(m-1)} = \delta_{mm} - \varkappa_{m-1,m}\,\delta_{m-1,m} \qquad m=2,3,\dots,n$$

$$\varkappa_{m,m+1} = \frac{\delta_{m,m+1}}{\delta_{mm}^{(m-1)}} \qquad m=1,2,\dots,n-1$$

$$\beta_{mm} = \frac{1}{\delta_{mm}^{(m-1)}} - \varkappa_{m,m+1}\cdot\beta_{m+1,m} \qquad m=n,n-1,\dots,1 \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_{m-1,m} &= -\varkappa_{m-1,m}\,\beta_{mm} \\ &\vdots \\ \beta_{2m} &= -\varkappa_{23}\,\beta_{3m} \\ \beta_{1m} &= -\varkappa_{12}\,\beta_{2m} \end{aligned}\right\} \quad m=n,n-1,\dots,2$$

тј. аз.

ПОСТУПАК УНАЗАД:

$$\delta_{mm}^{(n-m)} = \delta_{mm} - \varkappa_{m+1,m}\,\delta_{m+1,m} \qquad m=n-1,n-2,\dots,1$$

$$\varkappa_{m,m-1} = \frac{\delta_{m,m-1}}{\delta_{mm}^{(n-m)}} \qquad m=n,n-1,\dots,2$$

$$\beta_{mm} = \frac{1}{\delta_{mm}^{(n-m)}} - \varkappa_{m,m-1}\,\beta_{m,m-1} \qquad m=1,2,\dots,n \qquad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_{m,m+1} &= -\varkappa_{m+1,m}\,\beta_{mm} \\ &\vdots \\ \beta_{m,n-1} &= -\varkappa_{n-1,n-2}\,\beta_{m,n-2} \\ \beta_{mn} &= -\varkappa_{n,n-2}\,\beta_{m,n-1} \end{aligned}\right\} \quad m=1,2,\dots,n-1$$

Са елементима инверзне матрице условних ј-на који су срачунати према одговарајућим изразима (16) или (17) и са утицајним ф-јама за промене услова δ_{m0}, $m=1,2,\dots,n$, утицајне ф-је за СНВ X_m сагласно ј-ни

$$X_i = -\sum_{i=1}^{n} \beta_{ik}\,\delta_{i0} \qquad i=1,2,\dots n$$

гласе:

$$-X_m = \beta_{m1}\delta_{10} + \dots + \beta_{m,m-1}\delta_{m-1,0} + \beta_{mm}\delta_{m0} + \beta_{m,m+1}\delta_{m+1,0} + \dots + \beta_{mn}\delta_{n0}$$
$$m=1,2,\dots,n. \qquad (18)$$

Како су у основном систему континуалног носача, који се састоји од низа зглавкасто везаних простих греда, при положају силе у пољима $m=2,3\dots n$ $\neq 0$ само ут. ф-је $\delta_{m-1,0} = \alpha_{m-1,m,0}$ и $\delta_{m0} = \alpha_{m,m-1,0}$, на основу горњег израза одређујемо утицајне ф-је само за СНВ на крајевима поља m, тј. за X_{m-1} и X_m:

$$\left.\begin{aligned} X_{m-1} &= -(\beta_{m-1,m-1}\,\alpha_{m-1,m,0} + \beta_{m-1,m}\,\alpha_{m,m-1,0}) \\ X_m &= -(\beta_{m,m-1}\,\alpha_{m-1,m,0} + \beta_{mm}\,\alpha_{m,m-1,0}) \end{aligned}\right\} \quad m=2,3,\dots,n \qquad (19)$$

Када се сила $P=1$ налази у првом, $m=1$, односно последњем пољу $m=n+1$, различите од нуле су ут. ф-је $\delta_{10}=\alpha_{10,0}$ тј. $\delta_{n0}=\alpha_{nn+1,0}$ па су ут. ф-је за СНВ на крајевима ових поља:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -B_{11}\alpha_{10,0} \\ X_n &= -B_{nn}\alpha_{nn+1,0} \end{aligned}\right\} (20)$$

Ако у ј-нама (19) елементе инверзне матрице B_{m-1m} и B_{mm-1} прикажемо на основу (16-4) и (17-4) у облику:

$$B_{m-1m} = B_{mm-1} = -\varkappa_{mm-1}B_{m-1m-1} = -\varkappa_{m-1m}B_{mm}$$

утицајне ф-је за СНВ X_{m-1} и X_m могу да се опишу путем дијагоналних елемената инверзне матрице и $\varkappa$ коефицијената за поље m који су одређени из поступка обеју елиминација:

$$\left.\begin{aligned} X_{m-1} &= -B_{m-1m-1}(\alpha_{m-1m,0}-\varkappa_{mm-1}\alpha_{mm-1,0}) \\ X_m &= -B_{mm}(\alpha_{mm-1,0}-\varkappa_{m-1m}\alpha_{m-1m,0}) \end{aligned}\quad m=2,3,\dots n\right\} (21)$$

Када се сила $P=1$ налази у пољима m и $m+1$ ут. ф-је за СНВ X_m, $m=1,2,\dots n$ одређујемо путем ј-на (19) и (20) тј. путем елемената инверзне матрице.

Међутим, када се јединична сила налази ван ових поља, ут. ф-је за СНВ X_m, $m=1,2,\dots n$, не одређујемо путем елемената инверзне матрице већ их одређујемо за положај $P=1$ десно од поља $m+1$ из поступка елиминације унапред:

$$X_m = -\varkappa_{mm+1}X_{m+1}, \quad m=1,2,\dots n-1 \qquad (22)$$

а за положај силе лево од поља m према поступку елиминације уназад

$$X_m = -\varkappa_{mm-1}X_{m-1}, \quad m=2,3,\dots n \qquad (23)$$

Из ј-на (22) и (23) закључујемо да су ординате ут. лин. за СНВ X_m пропорционалне са ординатама ут. лин. за СНВ X_{m+1} у пољима десно од ослонца $m+1$ односно да су сразмерне са ординатама ут. лин. за СНВ X_{m-1} на делу носача лево од ослонца $m-1$.